Краевая многопредметная дистанционная олимпиада школьников «Интеллект»
Математика
11 класс

Задачи, оцениваемые в 2 балла

1. Сколько существует треугольников, не равных между собой, длины сторон которых – натуральные числа, а периметр равен 20?

1. 8; 2. 4; 3. 6; 4. 5.

2. Решите уравнение $5\sqrt{x-3}+2\sqrt{x}+3x=21$. Если корней несколько, то в ответе укажите их сумму.

1. 7; 2. 6; 3. 4; 4. Другой ответ.

3. Чему равно xy, если $3^x=12$, а $12^y=81$?

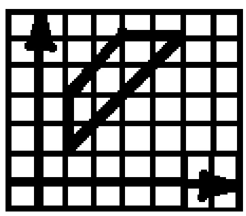
1. 4; 2. 3,5; 3. 27; 4. – 5.

4. С помощью какого из указанных преобразований график функции $g(x)=-3-f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$?

1. Симметрия относительно оси Oy и сдвиг на 3 единицы вниз;
2. Симметрия относительно оси Ox и сдвиг на 3 единицы вниз;
3. Симметрия относительно оси Oy и сдвиг на 3 единицы вправо;
4. Сдвиг на 3 единицы влево и симметрия относительно оси Ox.

5. Найдите координаты центра окружности, описанной около изображенного на рисунке четырехугольника, если сторона клетки равна 1.

1. $(3;3)$;
2. $(4,5;\ 2,5)$;
3. $(4;2)$;
4. Другой ответ.



6. Вычислите $\sin\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$. Выберите правильный ответ.

1. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$; 2. $\frac{9\sqrt{5}}{7}$; 3. $\frac{2}{7}$; 4. $\frac{5}{7}$.

7. Определите тангенс угла наклона прямой $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$. Выберите правильный ответ.

1. $\frac{7}{5}$; 2. $\frac{1}{5}$; 3. $-\frac{1}{5}$; 4. $-\frac{7}{5}$.

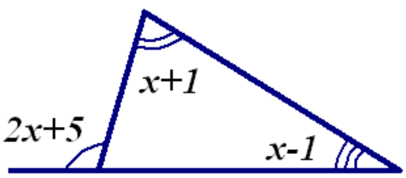
8. В равнобокой трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой одного из углов трапеции. В каком отношении делится каждая диагональ точкой их пересечения?

1. 1:2; 2. 1:3; 3. 2:3; 4. 1:4.

9. Учитель задал на дом трудную задачу. Оказалось, что в классе количество мальчиков, решивших её, равно количеству девочек, её не решивших. Какое из следующих утверждений верно?

1. Учеников, решивших задачу, больше, чем девочек в классе;
2. Учеников, решивших задачу, меньше, чем девочек в классе;
3. Мальчиков, не решивших задачу, больше, чем девочек в классе;
4. Учеников, решивших задачу, столько же, сколько девочек в классе.

10. Углы треугольника таковы, как указано на рисунке. Определите вид треугольника.



1. Равнобедренный; 3. Прямоугольный;
2. Остроугольный; 4. Треугольник не существует.

Задачи, оцениваемые в 3 балла

11. Сколько решений на интервале $(0;\pi)$ имеет уравнение $\sin x \cos x = \sin\frac{\pi}{5}$?

1. Уравнение имеет два решения на интервале $(0;\pi)$;
2. Уравнение имеет решения, но ни одно из них не принадлежит интервалу $(0;\pi)$;
3. Уравнение не имеет решений на R;
4. Уравнение имеет решения $\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\left(2\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $k \in Z$.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{x^2}{x^4+25}$. Укажите верный ответ.

1. 0; 2. 0,01; 3. 0,2; 4. 0,1.

13. Каково множество всех возможных значений выражения $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}$?

1. $\{3, -1\}$; 3. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;
2. $\{2, -2, 0\}$; 4. $\{-3, -1, 1, 3\}$.

14. Функция f определена на всей числовой прямой и удовлетворяет уравнению $f^2(x)=f(x^2)$ для всех x. Определите, какое условие должно обязательно выполняться.

1. f чётная; 3. f^4 чётная;
2. f неотрицательная; 4. f нечётная.

15. Найдите наименьший радиус круга, из которого можно вырезать треугольник, длины сторон которого 4 см, 5 см и 7 см.

1. 4; 2. 3,5; 3. 27; 4. 5,5.

16. Решите уравнение $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}=2$**.**

1. $-1\pm\sqrt{5}$; 2. $1+\sqrt{5}$; 3. $-2\pm\sqrt{6}$; 4. $2\pm\sqrt{6}$.

17. В школьной олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике – 50 человек, по информатике – 48 человек. Когда каждого из учеников спросили, в скольких олимпиадах он участвовал, ответ «по крайней мере в двух» дали в два раза меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной», а ответ «в трех» – втрое меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной». Сколько всего учеников приняло участие в этих олимпиадах?

1. 108; 2. 118; 3. 107; 4. 198.

18. Решите неравенство $\left|\frac{2x^3+2x^2-x+2}{x+1}\right|\le\left|1-2x^2\right|+\frac{3}{|x+1|}$**.**

1. $(-\infty;-1)$; 3. $(-\infty;-1)\bigcup(-1;+\infty)$;
2. $(-1;+\infty)$; 4. $(-1;1)$.

19. Сколькими способами числа $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$ **можно разбить на пары, чтобы отношения чисел во всех парах были одинаковыми?**

1. 0; 2. 3; 3. 2; 4. 1.

20. При каких значениях параметра a **уравнение** $x^4+2x^2+8=a$ **не имеет корней?**

1. $a=7$; 2. $a<6$; 3. $a>5$; 4. $a<8$.

Задачи, оцениваемые в 5 баллов

21. Дан многочлен $P(x)=(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+3)(x+2)(x+4)$**. Найдите сумму всех коэффициентов** $P'(x)$**.**

1. 720; 2. – 720; 3. – 620; 4. – 540.

22. Дан треугольник ABC **со сторонами** $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$**. Определите, чему равно отношение, в котором центр вписанной окружности делит биссектрису угла** B**.**

1. $\frac{a+b}{c}$; 2. $\frac{a+c}{2b}$; 3. $\frac{a+b+c}{b}$; 4. $\frac{a+c}{b}$.

23. Одновременно начали гонки с одного места два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, второй – 60 км/ч. Через полчаса с того же старта и в том же направлении отправился третий гонщик. Найдите скорость третьего гонщика, если известно, что он догнал первого гонщика на 1 ч 15 мин позже, чем второго.

1. 120 км/ч; 2. 140 км/ч; 3. 100 км/ч; 4. 90 км/ч.

24. Известно, что $9x^2+16y^2+144z^2=169$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $6x-4y+24z$.

1. 39; 2. 65; 3. 27; 4. 45.

25. Если $|x-y|=|y-z|=|z-t|=1$, то определите, чему не может быть равна разность $x-t$.

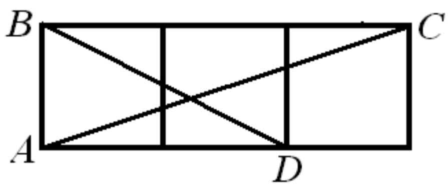
1. – 1; 2. – 3; 3. 0; 4. 1.

26. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=6,\ BC=6,\ CC_1=4$ найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

1. $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 2. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 3. $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 4. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

27. Три квадрата расположены так, как показано на рисунке. Найдите величину угла между прямыми AC и BD.

1. 45^0;
2. 30^0;
3. 40^0;
4. Другой ответ.



28. Две параллельные хорды окружности, радиус которой 25, имеют длину 14 и 40. Найдите расстояние между этими хордами.

1. 39; 2. 5; 3. 9; 4. 39 и 9.

29. При каких значениях a неравенство $\left(x^2-(a+2)x-2a^2+4a\right)\sqrt{1-x}\le 0$ имеет единственное решение?

1. $\left[\frac{2}{3};1\right]$; 2. $\left[\frac{1}{2};1\right]$; 3. $\left(\frac{1}{2};1\right)$; 4. $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$.

30. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\sqrt{y}}=0,\\ y-\cos x=0.\end{cases}$

1. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ n\in Z$;
2. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ n\in Z$;
3. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{1}{2}\right),\ n\in Z$;
4. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ n\in Z$.